

Andreas Hüppe

Spektrale finite Elemente für akustische Feldberechnung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Technischen Wissenschaften

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Fakultät für Technische Wissenschaften

1. Begutachter:

Univ.-Prof. Dr.techn. Manfred Kaltenbacher
Institut für Mechanik und Mechatronik,
Technische Universität Wien

2. Begutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg
Professur für Technische Dynamik,
Universität der Bundeswehr München

Dezember 2012

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende wissenschaftliche Arbeit selbstständig angefertigt und die mit ihr unmittelbar verbundenen Tätigkeiten selbst erbracht habe. Ich erkläre weiters, dass ich keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle aus gedruckten, ungedruckten oder dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte sind gemäß den Regeln für wissenschaftliche Arbeiten zitiert und durch Fußnoten bzw. durch andere genaue Quellenangaben gekennzeichnet.

Die während des Arbeitsvorganges gewährte Unterstützung einschließlich signifikanter Betreuungshinweise ist vollständig angegeben. Die wissenschaftliche Arbeit ist noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden. Diese Arbeit wurde in gedruckter und elektronischer Form abgegeben. Ich bestätige, dass der Inhalt der digitalen Version vollständig mit dem der gedruckten Version übereinstimmt.

Ich bin mir bewusst, dass eine falsche Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

(Unterschrift)

(Ort, Datum)

Measurement-, Actuator-, and Simulation-Technology

Andreas Hüppe

**Spectral Finite Elements
for Acoustic Field Computation**

Shaker Verlag
Aachen 2013

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Klagenfurt, Univ., Diss., 2013

Copyright Shaker Verlag 2013

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-2460-9

ISSN 2195-0288

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Für meinen Vater

Danksagung

Zuerst möchte ich mich ganz herzlich bei Univ.Prof. Dr.techn. Manfred Kaltenbacher für die kompetente Betreuung dieser Arbeit bedanken. Die vielen Gespräche brachten mich nicht nur fachlich weiter, sondern förderten auch den Spaß am wissenschaftlichen Arbeiten. Besonders möchte ich hierbei den ungezwungenen und angenehmen Umgang miteinander hervorheben, wodurch es jederzeit möglich war, alles offen anzusprechen, konstruktiv zu diskutieren und Lösungsansätze zu entwickeln.

Bei Herrn Univ.Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg möchte ich mich für das Interesse an meiner Arbeit bedanken und es freut mich, dass er sich bereit erklärt hat, die Aufgabe des Zweitgutachters zu übernehmen.

Auch durfte ich viele nette Kollegen kennen lernen, auf deren Unterstützung ich jederzeit zählen konnte. Herrn Dipl.-Math. Stefan Zörner danke ich für viele Gespräche über mathematische Grundlagen, Simulationsergebnisse und natürlich für die Bereitstellung der Strömungsdaten, die ich im Anwendungskapitel dieser Arbeit verwenden durfte. Für die Bereitstellung von Strömungsergebnissen danke ich auch Herrn Dr.techn. Michele De Gennaro und Herrn Ing. Pertr Šidlof, Ph.D.

Die in dieser Arbeit entwickelten Ansätze wurden mittels vieler Zeilen Programmcode in die FEM-Software CFS++ integriert. Bei Herrn Andreas Hauck, M.Sc. und Herrn Dr.techn. Simon Triebenbacher möchte ich mich in diesem Zusammenhang für die gute Kooperation und Hilfe bei Fragen der Implementierung und Infrastruktur bedanken. Herrn Dr.techn. Hendrik Husstedt danke ich ebenfalls für seine Unterstützung. Als *Nicht-Numeriker* konnte er immer wieder alternative Sichtweisen auf Problemstellungen bieten. Dies gilt auch für Herrn Dipl.-Ing. Alexander Onic und Herrn Dipl.-Ing. Christian Hofbauer, die sich immer Zeit genommen haben wenn Fragen auftauchten.

Es freut mich sehr, dass etliche der genannten über die Jahre zu Freunden geworden sind. Die vielen Stunden im Büro wurden da oftmals angenehm kurzweilig. Dabei möchte ich aber auch all denen danken, die mir außerhalb der Universität stets mit Rat und Tat zur Seite standen und freue mich sehr, dass die alten Freundschaften aus Erlangen erhalten geblieben, und in Klagenfurt neue hinzu gekommen sind. Alle einzeln zu nennen würde diesen Rahmen sprengen und birgt die Gefahr, doch jemanden zu vergessen. Daher belasse ich es hier bei

einem allgemeinen, aber von Herzen kommenden Dank an alle.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie für Unterstützung und Rückhalt in allen Lebenslagen. Dies hat alles sehr viel leichter gemacht.

Zum Schluss möchte ich noch Inga danken, die gerade in den letzten Monaten der Fertigstellung der Arbeit sehr für mich da war.

Andreas Hüppe

Spectral Finite Elements for Acoustic Field Computation

DISSERTATION

to obtain the academic degree

Doctor of Technical Sciences

Alps-Adriatic University of Klagenfurt

Faculty of Technical Sciences

1st Assessor:

Univ.-Prof. Dr.techn. Manfred Kaltenbacher
Institute of Mechanics and Mechatronics,
Vienna University of Technology

2nd Assessor:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg
Chair of Technical Dynamics,
Universität der Bundeswehr München

December 2012

Abstract

This thesis focuses on the numerical simulation of acoustic field problems utilizing the spectral finite element method (s-FEM). The reduction of computational time constitutes a big challenge in the field of computational acoustics and higher order methods such as s-FEM improve the quality of the solution by increasing the order of ansatz functions. In this way it is possible to obtain a better accuracy with the same number of unknowns. Applied to the conservation equations of linear acoustics, the mixed variational ansatz leads to a numerical scheme which is implemented in a very efficient way. This formulation can be seen as a basis for the novel approaches developed within this thesis.

With volume discretization methods like the FEM, it is crucial to provide free field radiation boundary conditions for frequency and time domain computations. Therefore, the aforementioned scheme is extended by a perfectly matched layers (PML) formulation for frequency and time domain computations. Time domain PML formulations often suffer from instabilities or the occurrence of higher order time derivatives. With the proposed PML it is possible to avoid both by introducing an auxiliary variable which vanishes inside the propagation domain, thus limiting the additional computational effort. It is possible to show stability of the PML by analysing the associated Cauchy problem and to demonstrate its accuracy by means of numerical test cases.

Acoustic fields are always coupled to other physical fields which generate acoustic sources. In the simplest case, the mechanical vibration of a loudspeaker membrane generates an acoustic wave. In this thesis, the special focus is on aeroacoustic sound generation. As the direct computation of aeroacoustic phenomena using the compressible Navier Stokes equations is not feasible for large scale problems, one needs to rely on hybrid schemes in which the acoustic field is computed for a given flow field based upon an aeroacoustic analogy. In this way, any influence of the acoustic field on the flow is neglected, which is a valid assumption in the case of lower Mach number flows. Besides the well known Lighthill analogy, more general formulations based on a perturbation ansatz can be found in literature. The latter are usually given as a system of PDEs for which a stable and efficient finite element formulation is not available. In the second part of this thesis, those limitations are circumvented by deriving a stable finite element formulation for a set of perturbation equations utilizing the mixed variational prin-

ciple along with additional stabilization terms. The complete numerical scheme is applied to aeroacoustic field problems to demonstrate its validity and the advantages of using perturbation approaches in comparison to Lighthill's analogy.

Contents

1. Introduction	1
1.1. Noise, sound and engineering	2
1.2. Recent advances in computational (aero-)acoustics	7
1.2.1. The low, high and mid-frequency range	8
1.2.2. Free field radiation boundary conditions	11
1.2.3. A short survey of aeroacoustic analogies	13
1.3. Aim of the thesis	14
2. Spectral Finite Elements	17
2.1. Variational forms and functional spaces	18
2.1.1. An introduction to Sobolev spaces	20
2.1.2. Weak solutions	22
2.1.3. Systems of PDEs and mixed variational forms	23
2.2. Discretization	25
2.2.1. The discrete problem	26
2.2.2. Conforming elements	28
2.2.3. Numerical integration and reference maps	30

2.3.	Higher order polynomial interpolation	33
2.3.1.	Legendre polynomials and hierarchical finite elements	35
2.3.2.	Lagrange polynomials and spectral elements	37
2.3.3.	The benefits	42
3.	Computational Acoustics	45
3.1.	Variational formulations for acoustic field calculations	47
3.1.1.	Finite element formulation of the wave equation	49
3.1.2.	Finite element formulation of the conservation equations	50
3.2.	Time integration	53
3.3.	Free field radiation boundaries for conservation equations	55
3.3.1.	Absorbing boundary conditions	55
3.3.2.	Perfectly matched layers	56
4.	Computational Aeroacoustics	67
4.1.	Governing equations	69
4.1.1.	The incompressible Navier Stokes equations	74
4.1.2.	Euler equations	74
4.1.3.	Linearized Euler equations and wave equation	75
4.2.	Aeroacoustic equations	77
4.2.1.	Lighthill's aeroacoustic analogy	77
4.2.2.	Perturbation equations	79
4.3.	Finite element methods for computational aeroacoustics	91
4.3.1.	FEM for Lighthill's wave equation	92
4.3.2.	A stabilized finite element method for perturbation equations	93
5.	Applications	105
5.1.	Circular cylinder in a cross flow	106
5.1.1.	Flow solution	106
5.1.2.	Source term computation	107
5.1.3.	Acoustic grid generation and interpolation of acoustic source terms	110
5.1.4.	Acoustic field computation	112
5.2.	Airframe noise	114

5.3. Human phonation	118
5.3.1. Two dimensional model	120
5.3.2. Three dimensional model	125
6. Summary and Outlook	131
6.1. Summary	131
6.2. Outlook	133
A. Non-dimensional form of Flow Field Variables	135
B. Source Term Filtering	137
C. Derivation of Convected Acoustic Equations	141
C.1. Derivation of LPCE	141
C.2. Derivation of APE	144
C.3. Derivation of 1D convective wave equation	147
D. Time stepping Algorithms	149
D.1. First order ODE	149
D.2. Second order ODEs	153
List of Figures	155
Bibliography	159

Notation and Abbreviations

In this thesis, scalars are represented by normal letters (b), Cartesian vectors are set in bold-italic letters ($\mathbf{b}$). Matrices are capital boldface Roman letters ($\mathbf{B}$).

Abbreviations

HPC	High performance computing
RHS	Right hand side
FWH	Ffowcs Williams & Hawkings method
FEM	Finite element method
FDM	Finite difference method
CFD	Computational fluid dynamics
LES	Large eddy simulation
PDE	Partial differential equation
FVM	Finite volume method
DG	Discontinuous Galerkin
ODE	Ordinary differential equation

Mathematical operators

∇b	Gradient of scalar-valued function b
$\nabla \cdot \mathbf{b}$	Divergence of vector-valued function $\mathbf{b}$
$\nabla \times \mathbf{b}$	Curl of vector-valued function $\mathbf{b}$
Δb	Laplacian of scalar-valued function b ($\Delta b = \nabla \cdot \nabla b$)
$\partial \square / \partial x$	Spatial partial derivative
$\int_{\Omega} \square d\Omega$	Volume integral over Ω
$\int_{\Gamma} \square d\Gamma$	Surface integral over Γ
$\partial \square / \partial x$	Spatial partial derivative of $\square$
$\partial \square / \partial t$	First partial derivative of $\square$ with respect to time
$\partial^2 \square / \partial t^2$	Second partial derivative of $\square$ with respect to time
D/Dt	Substantial or total temporal derivative
$\partial \square / \partial \mathbf{n}$	Directional derivative of $\square$ with respect to $\mathbf{n}$
$\mathbf{I}$	Identity matrix
$\square^T$	Transpose of $\square$
$\square^{-1}$	Inverse of $\square$
$\square_1 \otimes \square_2$	Tensor or dyadic product

(Aero-)Acoustics

$\square_0$	Constant material parameters
c_v, c_p	Specific heat at constant volume/pressure J/K
c	Speed of sound m/s
k	Wave number rad/m
ω	Angular frequency rad/s
f	Frequency Hz
λ	Wave length m
$\mathbf{u}$	Velocity m/s
p^h	Hydrodynamic fluid pressure Pa
$\mathbf{u}^v$	Solenoidal component of fluid velocity m/s
$\boldsymbol{\omega}$	Flow vorticity 1/s

$\bar{\square}$	Time averaged quantity
ρ	Density kg/m ³
M	Mach number of fluid flow -
$\mathbf{T}$	Viscous stress tensor Pa
E	Total energy per unit volume W
e_i	Internal energy W
T	Temperature K
p^a	Sound pressure Pa
$\mathbf{u}^a$	Acoustic particle velocity m/s
ψ_a	Scalar acoustic velocity potential m ² /s
$\mathbf{T}_{LH}$	Lighthill tensor m ² /s ²
$\square'$	Perturbation quantity
$\square^a$	Acoustic quantity
$\square^h$	Purely hydrodynamic field variable
$\square^{ic}$	Incompressible field variables
η	Dynamic viscosity kgs/m
R	Gas constant J/(molK)
k	Thermal conductivity WK/m

Functional Spaces

C^p	The space of p -times continuous differentiable functions.
$L_2(\Omega)$	Space of square Lebesgue integrable functions u

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega < \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d,$$

over a d -dimensional domain (cf. [1] p. 22).

H^1	Hilbert Sobolev spaces. The spaces of square integrable functions, whose first derivatives in a weak sense are also square integrable
$H(\text{div})$	The space of square integrable functions, whose divergence in a weak sense are also square integrable

$H(\text{curl})$ The space of square integrable functions, whose curl in a weak sense are also square integrable

Software

CFS++ Coupled Field Simulation in C++. Inhouse FEM code c.f. [62]

cplreader Reader for CFD data which produces HDF5 files for CFS++

HDF5 Hierarchical Data Format

CGNS CFD General Notation System

XDMF eXtensible Data Model and Format