

Improving the Error-Floor Behavior of Low-Density Parity-Check Codes

Verbesserung der iterativen Decodierung
von Low-Density Parity-Check Codes
bei hohem Störabstand

Der Technischen Fakultät der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

vorgelegt von

Stefan Ländner

Erlangen, 2010

Als Dissertation genehmigt von
der Technischen Fakultät der
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung:	28. Oktober 2010
Tag der Promotion:	21. Dezember 2010
Dekan:	Prof. Dr.-Ing. Reinhard German
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Johannes B. Huber (Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg) Prof. Dr. Olgica Milenkovic (University of Illinois at Urbana-Champaign, USA)

Erlanger Berichte aus Informations- und Kommunikationstechnik

Band 31

Stefan Ländner

**Improving the Error-Floor Behavior
of Low-Density Parity-Check Codes**

D 29 (Diss. Universität Erlangen-Nürnberg)

Shaker Verlag
Aachen 2011

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Erlangen-Nürnberg, Univ., Diss., 2010

Copyright Shaker Verlag 2011

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0425-0

ISSN 1619-8506

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Acknowledgments

I would like to thank all the great people I had the pleasure to work with and who accompanied me during my doctorate studies. First of all, I would like to cordially thank my advisor Prof. Dr.-Ing. Johannes Huber for his supervision, his warm-hearted support, and for his continued faith in me and my research. My sincere gratitude also goes to my co-advisor Prof. Dr. Olga Milenkovic for her continuous effort in teaching me, her virtually unlimited knowledge on LDPC codes and her strong support of my research. The research documented in this thesis would have been impossible without the great ideas, invaluable suggestions, thoughtful guidance, and encouragement of both of them.

I would also like to thank my thesis committee members, and my colleagues at the Institute for Information Transmission and at the University of Colorado for their help and for creating a friendly and inspiring work environment.

I owe a lot to my friend and former officemate Thorsten Hehn for the great times we shared, the excellent collaboration and invaluable discussions at the black board at our office. I also thank all of my friends for the bodacious times together, especially to my former colleagues Kiran Prakash, David Leyba, and Azad Ravanshid. I also thank Jorge Cham whose inspiring PhD comics often hit the nail on the head.

Last but not least, I am deeply grateful to my parents and family for their never-ending support and encouragement, and especially to Sandra for her love and support that turned even the strenuous parts of writing this thesis into a wonderful time.

Deutschsprachige Zusammenfassung (Abstract in German)

Moderne Kommunikationssysteme ermöglichen eine hervorragende Übertragungsqualität durch Verwendung digitaler Übertragungstechniken, welche bei moderater Systemkomplexität den Austausch von Leistungs- und Bandbreiteneffizienz erlauben. Digitale Übertragungsverfahren nutzen Kanalkodierung zum Schutz der übertragenen Daten gegen Fehler, die durch den Übertragungskanal verursacht werden, mit dem Ziel, der theoretischen Schranke für verlässliche Übertragung, bekannt als die Kanalkapazität, möglichst nahe zu kommen.

Low-Density Parity-Check (LDPC) Codes sind neben Turbo Codes die wohl bekannteste Familie moderner Kanalcodes und ermöglichen eine Übertragung nahe der Kanalkapazität, trotz der Verwendung von iterativen Decodern mit reduzierter Komplexität, die üblicherweise wegen des iterativen Austauschs von Verlässlichkeitsinformation als „Belief-Propagation“ Decoder bezeichnet werden.

Die Fehlerratenkurven von iterativen Decodern für den Additiven Weißen Gaußschen Störkanal weisen für ein hohes Signal-zu-Störleistungsverhältnis, auch Störabstand genannt, ein ausflachendes Verhalten auf. Die Fehlerrate fällt dabei nicht unter eine bestimmte Kurve, die fortan als Fehlergrund bezeichnet wird, besser bekannt unter der englischen Bezeichnung „Error-Floor“. Dieses Ausflachen der Fehlerratenkurven beschränkt die Verwendung von LDPC Codes für Anwendungsfälle, die hohe Leistungsanforderungen an das Übertragungsverfahren stellen, wie zum Beispiel Magnetspeicher oder optische Übertragungssysteme. Die Hauptursache von Decodierfehlern im Bereich ausflachender Fehlerratenkurven für den Gaußschen Kanal sind charakteristische Strukturen in der Paritätsprüfmatrix des Codes, sogenannte „Trapping Sets“. Diese führen beim Auftreten ungünstiger Kanalfehlerkonstellationen zu irreversiblen Fehlerzuständen des Decodieralgorithmus.

In dieser Arbeit wird das Fehlerverhalten von LDPC Codes für die iterative Decodierung nach Übertragung über den additiven weißen Gaußschen Störkanal im Bereich ausflachender Fehlerratenkurven untersucht und verbesserte Dekodierverfahren zur Senkung der Fehlerratenkurve bei hohem Störabstand werden entwickelt. Diese Verbesserungen beruhen auf Veränderungen entweder des Decodieralgorithmus oder der Paritätsprüfmatrix des Codes. Desweiteren werden theoretische Schranken zur notwendigen Redundanz in der Paritätsprüfmatrix berechnet, mit der alle Trapping Sets einer vorgegebenen Größe vermieden werden können.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind in drei Schwerpunkte gegliedert.

Zum Ersten werden Fehlerereignisse des iterativen Decodieralgorithmus aufgrund von

Trapping Sets anhand ausführlicher Simulationsergebnisse untersucht. Elementare Trapping Sets liefern den größten Beitrag zur Fehlerrate und werden entsprechend ihres Decodierverhaltens klassifiziert. Für die Familie der strukturierten LDPC Codes lassen sich Trapping Sets zudem auf analytischem Weg beschreiben. Es wird gezeigt, dass von projektiven Geometrien erzeugte LDPC Codes keine kleine, elementare Trapping Sets besitzen. Für LDPC Codes auf Basis von Steiner Triple Systemen wird die Existenz und Häufigkeit mehrere Klassen kleiner Trapping Sets auf theoretischem Weg sowie durch Simulationen nachgewiesen. Ferner wird ihr Decodierverhalten im Error-Floor Bereich für den binären Auslöschkanal bei „Bit-Flipping“-Decodierung mit Hilfe von Konfigurationen im Graphen der LDPC Codes analysiert.

Zum Zweiten werden, auf Basis der gewonnenen Einblicke in das Decodierverhalten und in die Charakteristika von Trapping Sets, zwei neue Modifikationen von Belief-Propagation Decodern vorgestellt, die die Fehlerraten für hohen Störabstand verbessern.

Neue Decodieralgorithmen mit zusätzlichen Dämpfungsverfahren, die auf dem Mittelwert von Bitwahrscheinlichkeiten in aufeinanderfolgenden Decoderiterationen beruhen, werden vorgestellt. Durch ausgewählte Methoden zur Mittelwertbildung werden Fehlerereignisse im iterativen Decoder vermieden, welche sonst durch Trapping Sets in Kombination mit ungünstigen Kanalübergangswahrscheinlichkeiten hervorgerufen werden. Eine theoretische Analyse und eine simulationsbasierte Untersuchung untermauern die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Methoden. Fehlerratensimulationen einiger Beispielscodes zeigen, dass das Signal-zu-Störleistungsverhältnis im Bereich des Fehlergrunds bei vorgegebener Fehlerrate um mehrere Zehntel eines Dezibel verbessert wird, dies entspricht einer Absenkung der Fehlerrate um mehr als eine Größenordnung bei vorgegebenem Störabstand. Leistungsabschätzungen für sehr hohe Störabstandswerte lassen weit größere Verbesserungen erwarten.

Die Decodierung mit neu konstruierten Paritätsprüfmatrizen, welche auf die Struktur ausgewählter Trapping Sets angepasste, redundante Zeilen enthalten, ermöglicht die Konvergenz des Decodieralgorithmus hin zur Entscheidung für das korrekte Codewort. Zu diesem Zweck werden Methoden zur Erzeugung geeigneter redundanter Zeilen für ausgewählte Codes mit bekannter Struktur der vorhandenen Trapping Sets vorgestellt.

Zum Dritten wird in einer analytischen Studie das Verhältnis zwischen der Größe einer redundanten Paritätsprüfmatrix und der Existenz von Trapping Sets einer bestimmten Größe durch theoretische Schranken beschrieben. Diese Schranken werden mit LDPC Codes mit bekannten Eigenschaften der Trapping Sets verglichen.

Abstract

Modern communication systems achieve the best performance using digital techniques, which allow the trade-off between power and bandwidth efficiency while maintaining manageable system complexity. Digital communication schemes rely on channel coding for protecting transmitted data against errors introduced by the communication channel, in order to approach the theoretical bounds of reliable transmission, known as the channel capacity. Low-density parity-check codes have, besides turbo and polar codes, become a most prominent class of channel codes in modern coding theory, due to their performance close to channel capacity despite using low-complexity belief-propagation decoders.

The performance of iterative belief-propagation decoders for additive white Gaussian noise channels at high signal-to-noise ratios, however, exhibits a degradation in its slope and does not under-run a certain error rate curve, called error floor. High error floors are detrimental for special applications with high performance requirements, such as magnetic storage and optical communications. The main cause of decoder failures in the error floor region are substructures in the code's parity-check matrix, termed trapping sets, which lock the decoder in irreversible failure states when unfavorable channel noise realizations are present.

We study the error-floor behavior of LDPC codes under belief-propagation decoding for the Gaussian channel and improve decoding strategies for lowering the error floor based on algorithmic improvements and decoding graph modifications. Furthermore, we derive bounds on the required redundancy of the decoding graph in order to avoid all trapping sets of given size.

First, the failure events of belief-propagation decoders due to trapping sets are studied based on extensive simulations, and elementary trapping events, as the most harmful cause of errors, are classified according to their decoding behavior. A theoretical characterization of trapping sets by analytical means is performed for structured codes. LDPC codes from projective geometries are identified as a class of codes without small elementary trapping sets, whereas LDPC codes from Steiner triple systems are proven to contain numerous classes of small trapping sets. For the latter codes, the error-floor behavior is also investigated for bit-flipping decoding over the binary symmetric channel, using underlying configurations in the code graph.

Second, based on the improved understanding of the error floor, two novel decoder modifications are proposed that reduce the error floor.

The introduction of averaged decoding algorithms allows for correcting belief-propagation decoding errors due to trapping sets by a special damping technique, which is based on the average of bit reliability values in consecutive iterations. These methods are theoretically analyzed and are demonstrated to significantly lower the error floor. Perfor-

mance simulations for example codes at the onset of the error floor indicate improvements of several tenths of a decibel in terms of signal-to-noise ratio and frame error rates lowered by more than one order of magnitude, respectively. Performance estimates for very high signal-to-noise ratios imply even better performance gains.

The use of redundant parity-check matrices which contain linearly dependent rows, adapted to the local structure of a selected trapping set, helps the decoder to converge to correct codewords. We develop methods for forming redundant parity-check equations for sample codes with known trapping set structure and demonstrate their effect on decoder convergence.

We also present an analytical study for characterizing the trade-off between the number of redundant checks and the existence of trapping sets of certain sizes in a parity-check matrix, by using probabilistic and constructive bounds. Furthermore, we compare the theoretical bounds to codes with known trapping set properties.

Contents

Abstract (German)	v
Abstract	vii
1 Introduction	1
2 Fundamentals of Digital Communications	5
2.1 System Model	5
2.2 Communication Channels	7
2.2.1 Binary Symmetric Channel	8
2.2.2 Binary Erasure Channel	9
2.2.3 Additive White Gaussian Noise Channel	10
2.3 Channel Coding	16
2.3.1 Binary Linear Block Codes	17
2.3.2 Decoding Concepts of Binary Linear Codes	19
3 Low-Density Parity-Check Codes and Iterative Decoding	23
3.1 Low-Density Parity-Check Codes	23
3.2 Factor Graphs and Iterative Decoding	27
3.3 Message-Passing Decoding for AWGN Channels	31
3.3.1 Basic Concepts of BP Decoding	32
3.3.2 Variable and Check Node Operations	34
3.3.3 Iterative Decoding	37
3.3.4 Efficient Implementation and Log-Likelihood Ratios	39
3.3.5 Min-Sum Message-Passing Decoders	41
3.4 Message-Passing Decoders for Other Channels	42
3.4.1 Iterative Decoding for the BEC	42
3.4.2 Bit-Flipping Decoding for the BSC	44
3.5 Design of LDPC Codes	45
3.5.1 Random-like LDPC Codes	46

3.5.2	Structured LDPC Codes	47
3.6	Simulation Setup and Example Codes	49
4	Error-Floor Phenomena for Iterative Decoding of LDPC Codes	53
4.1	Background	53
4.2	Definitions and Terminology	56
4.3	Error Events of BP Decoding for the AWGN Channel due to Trapping Sets	58
4.4	Classification of Error Events from Elementary Trapping Sets	66
5	Classification of Trapping Sets for Structured LDPC Codes	71
5.1	Trapping Sets in LDPC Codes from Projective Geometries	71
5.1.1	Definition of PG LDPC Codes	72
5.1.2	Trapping Sets in PG LDPC Codes	75
5.1.3	Simulation Results	78
5.2	Trapping Sets in LDPC Codes from Steiner Triple Systems	81
5.2.1	Definitions and Terminology of STSs and STS LDPC Codes	82
5.2.2	Stopping sets in STS LDPC Codes for the BEC	84
5.2.3	Definition of Trapping sets of STS LDPC codes	85
5.2.4	Analysis of Trapping Sets of STS LDPC codes	86
5.2.5	Simulation Results for the AWGN channel	89
5.2.6	Analysis of Trapping Sets of Bit-Flipping Decoding for the BSC	91
6	Reducing the Error Floor by Algorithmic Techniques	97
6.1	Review of Damping Techniques for Iterative Decoding	97
6.2	Motivation for Averaged Decoding Techniques	99
6.3	Definition of Averaged Decoding Algorithms	102
6.4	Effect of Averaged Decoding on Trapping Sets	108
6.5	Performance of Averaged Decoding Algorithms	114
6.6	Convergence Properties of Averaged Decoders	122
7	Reducing the Error Floor by Modifications of the Decoding Graph	127
7.1	Redundant Parity-Check Matrices	127
7.2	Trapping Sets and Redundant Parity-Check Equations	129
7.3	Structured Method for Forming Redundant Parity-Check Equations	133
8	The Trapping Redundancy of Linear Block Codes	137
8.1	Definition of the Trapping Redundancy	137
8.2	Bounds on the Trapping Redundancy	140
8.2.1	Bounds for General Trapping Sets	140

8.2.2	Bounds for Elementary Trapping Sets	142
8.2.3	A Constructive Approach to the Trapping Redundancy	145
8.2.4	Asymptotic Formulae for the Trapping Redundancy	146
8.2.5	Asymptotic Formulae for the Elementary Trapping Redundancy . .	148
8.3	Trapping Redundancy: Analytical Comparisons	150
8.3.1	Bounds for the $[2640, 1320]$ Margulis Code	150
8.3.2	Bounds for PG LDPC Codes	152
9	Conclusions	153
A	Acronyms	155
	Bibliography	163